Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo 2007

Nombre: ______________________

Carnet: ______________ Sección: ____

MA-1112— Primer parcial Tipo A4—

1. Calcule las siguientes integrales

a)

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{y^3 - 9y\cos y + 26y^{-1}}{y} dy$$

Solución

Sea I la integral que queremos calcular,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{2\pi} y^2 - 9\cos(y) + 26y^{-2} dy \\ &= \frac{y^3}{3} - 9\sin(y) - \frac{26}{y}\Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{(2\pi)^3}{3} - 9\sin(2\pi) - \frac{26}{2\pi} \\ &\quad - \left(\frac{\pi^3}{3} - 9\sin(\pi) - \frac{26}{\pi}\right) \\ &= \frac{7\pi^3}{3} + \frac{13}{\pi}. \end{aligned}$$

b)

$$\int \frac{x^2 - 1}{(x^3 - 3x)^7} dx.$$

Solución

Sea I la integral que queremos calcular. Usamos la sustitución $u = x^3 - 3x$, $du = (3x^2 - 3)\, dx$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^7} = -\frac{u^{-6}}{18} + C = -\frac{(x^3 - 3x)^{-6}}{18} + C$$

2. Calcule la suma de Riemman de $f(x) = x\,[x]$ en el intervalo [0,5] para la partición

$$x_0 = 0, x_1 = 0{,}5, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 5$$

usando los extremos derechos de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$.

Solución

Como estamos usando los extremos derechos de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tenemos que

$$\overline{x}_1 = 0{,}5,\ \overline{x}_2 = 2, \overline{x}_3 = 4, \overline{x}_4 = 5.$$

Entonces

$$\begin{aligned} S_R &= (0{,}5)\,[0{,}5]\,(0{,}5-0) + 2\,[2]\,(2-0{,}5) + 4\,[4]\,(4-2) + 5\,[5]\,(5-4) \\ &= 0 + 6 + 32 + 25 = 63. \end{aligned}$$

3. De cierta función par continua en todo el conjunto de los números reales, $f(x)$ se conoce que:

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx = H$$

y

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = K.$$

Halle (y justifique) el valor de la integral $\int_0^a f(x)dx$ en términos de H y K.

Solución

Usando la propiedad aditiva de intervalos tenemos que

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

es decir,

$$H = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx + K$$

Por otro lado por ser f par se tiene (usando la sustitución $u = -x$):

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(u)du = \int_{0}^{a} f(x)dx,$$

Tenemos entonces

$$H = 2\int_{0}^{a} f(x)dx + K$$

lo que da

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = (H - K)/2$$

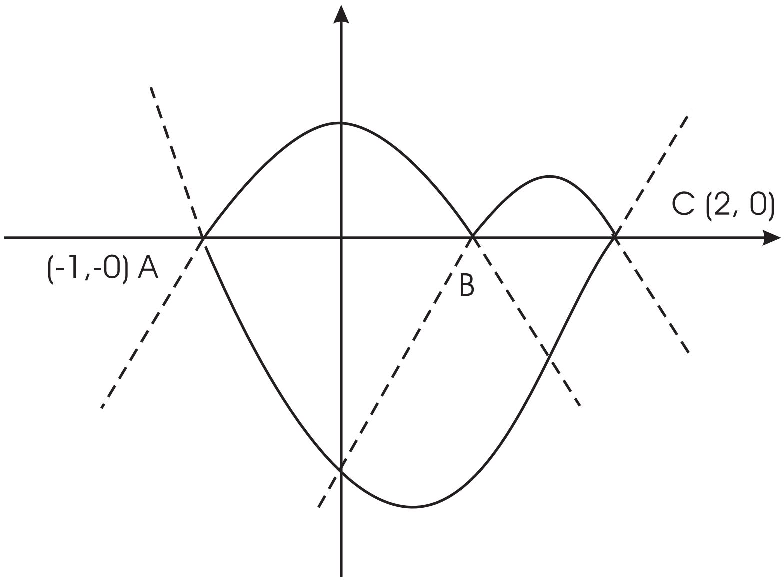
4. Dados los tres puntos $A(-1,0),\ B(1,0),\ C(2,0),$ considere la figura plana limitada por:

   i) el arco de extremos $A,\ B$ de la parábola de ecuación $y = 1x^2,$

   ii) el arco de extremos $B,\ C$ de la parábola de ecuación $y = 3x - x^2 - 2,$

   iii) el arco de extremos a, C de la parábola de ecuación $y = x^2 - x - 2.$

Solución



a)

b) Área $\displaystyle\int_{-1}^{1}[(1-x^2)-(x^2-x-2)]dx + \int_{1}^{2}[(3x-x^2-2)-(x^2-x-2)]dx =$

c) $\displaystyle = \int_{-1}^{1}(-2x^2+x+3)dx + \int_{1}^{2}(-2x^2+4x)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{-2x^3}{3} + 2x^2\right]_{1}^{2} = 6.$